Esercizio 7.12 (a) Se b è un multiplo comune di $a_1, \dots, a_r$, allora $\mathrm{mcm}(a_1, \dots, a_r)$ divide b in base alla definizione di minimo comune multiplo. Viceversa, se $\mathrm{mcm}(a_1, \dots, a_r)$ divide b, allora, poiché ogni a_i divide $\mathrm{mcm}(a_1, \dots, a_r)$, per transitività segue che ogni a_i divide b.
(b) Procediamo per induzione su $r \geq 2$. Se $r = 2$, allora

$$\mathrm{mcm}(a_1, a_2) = \frac{|a_1 a_2|}{\mathrm{MCD}(a_1, a_2)} = |a_1||a_2|,$$

dato che, essendo a_1, a_2 coprimi, il denominatore della frazione è 1. Ciò costituisce la base dell'induzione. Sia ora $r > 2$ e supponiamo la tesi vera per $r-1$. Sia $h = |a_1| \cdots |a_r|$. Allora h è un multiplo comune di $a_1, \dots, a_r$. Sia ora k un multiplo comune di $a_1, \dots, a_r$. Allora, in particolare, a_r divide k, sia $k = a_r q$. Dunque, per ogni $i = 1, \dots, r-1$, a_i divide $a_r q$, ma, per ipotesi, a_i è coprimo con a_r. Pertanto, per ogni $i = 1, \dots, r-1$, a_i divide q. Ciò implica, alla luce di (a), che $\mathrm{mcm}(a_1, \dots, a_{r-1})$ divide q, ossia, per l'ipotesi induttiva, $|a_1| \cdots |a_{r-1}|$ divide q. Ne consegue, per sostituzione, che

$$k = |a_1| \cdots |a_{r-1}| a_r t, \text{ per qualche } t \in \mathbb{Z},$$

e dunque h divide k, come volevasi. Ciò prova che h è un minimo comune multiplo di $a_1, \dots, a_r$. Essendo positivo, è $\mathrm{mcm}(a_1, \dots, a_r)$.